* Si $k = 3p+1$: $\arg(z+3i) = \dfrac{(3p+1)\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(z+3i) = p\pi + \dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg(z+3i) \equiv \dfrac{\pi}{3}(\pi) \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tq : $z+3i = \alpha\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

Posons $z = x+iy \Rightarrow x+iy+3i = \dfrac{\alpha}{2} + i\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \alpha \in \mathbf{R}^*$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = -3 + \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbf{R}^*$$

d'où $M \in \Delta$: $y = -3+\sqrt{3}\,x$ privé du point $A(0,-3)$

* Si $k = 3p+2$

$\arg(z+3i) = (3p+2)\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(z+3i) = p\pi + \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

il existe $\alpha \in \mathbf{R}^* / z+3i = \alpha\, e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\alpha}{2} & \alpha \in \mathbf{R}^* \\ y = -3 + \alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

d'où $M \in \Delta' : y = -3 - x\sqrt{3}$ privé du point $A(0,-3)$

Conclusion : L'ensemble demandé est $D \cup \Delta \cup \Delta'$ où

$D : y = -3$; $\Delta : y = -3+\sqrt{3}x$; $\Delta' : y = -3 - x\sqrt{3}$

Solution 11 :

$a = [r,\theta] = r\,e^{i\theta}$

* $b = a + i\overline{a} = r\,e^{i\theta} + ir\,e^{-i\theta} = r(e^{i\theta} + i\,e^{-i\theta})$ or $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + i\,e^{-i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta + i(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= (\cos\theta + \sin\theta) + i(\cos\theta + \sin\theta) \\ &= \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)\, e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$